

Kvadratické rovnice a nerovnice

Kvadratická rovnice – rovnice, kterou lze psát ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

ax^2 ... kvadratický člen, bx ... lineární člen, c ... absolutní člen

1. Ryze kvadratická rovnice ... $ax^2 + c = 0$... řeší se rozkladem nebo úpravou

Př. $4x^2 - 9 = 0$

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

nebo $4x^2 = 9$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

2. Kvadratická rovnice bez absolutního členu ... řeší se vytýkáním.

Př. $5x^2 - 4x = 0$

$$x(5x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{4}{5}$$

3. Úplná kvadratická rovnice ... řeší se pomocí vzorce. Počet řešení udává diskriminant $D = b^2 - 4ac$

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má řešení $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Výraz pod odmocninou je diskriminant D .

Je-li $D > 0$ má rovnice 2 různé reálné kořeny, je-li $D = 0$ má rovnice jeden (dvojnásobný) reálný kořen, je-li $D < 0$ nemá rovnice reálné kořeny.

Graficky jsou kořeny kvadratické rovnice průsečíky paraboly příslušné kvadratické funkce s osou x .

Také ryze kvadratická rovnice a kvadratická rovnice bez absolutního členu jsou řešitelné tímto vzorcem, je to však zdlouhavé.

4. Pokud úplnou kvadratickou rovnici vydělíme a , dostaneme normovaný tvar kvadratické rovnice: $x^2 + px + q = 0$.

Pro její kořeny x_1, x_2 platí: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Příklady

Řešte kvadratické rovnice

- 1) $x^2 - x = 0$
- 2) $x^2 - 5x = 0$
- 3) $2x^2 + 6x = 0$
- 4) $5x^2 + 12x = 0$
- 5) $x^2 - 64 = 0$
- 6) $79 - 7x^2 = 16$
- 7) $x^2 - 125 = 0$
- 8) $3x^2 - 4x + 6 = 0$
- 9) $2x^2 - 9x + 4 = 0$
- 10) $5x^2 - 12x + 64 = 0$
- 11) $x^2 + 14x + 24 = 0$
- 12) $100x^2 - 20x - 63 = 0$
- 13) $5x^2 - 8x + 5 = 0$

Vyřešte pomocí vzorců pro součet a součin kořenů:

- 1) $x^2 - 7x + 6 = 0$
- 2) $x^2 - x - 12 = 0$
- 3) $x^2 + 5x + 4 = 0$
- 4) $x^2 + 4x - 12 = 0$
- 5) $x^2 + 6x + 8 = 0$
- 6) $x^2 - 9x + 18 = 0$
- 7) $x^2 - 7x + 12 = 0$
- 8) $x^2 - 10x + 24 = 0$
- 9) $x^2 - 19x - 20 = 0$
- 10) $x^2 + 11x + 24 = 0$

Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

- 1) 3, 4
- 2) -2, 6
- 3) -3, -5
- 4) 7, 9
- 5) 2,5; 4,5

Vyřešte rovnice a proveďte zkoušku správnosti

1) $(x + 3)(x + 4) + (x - 2)(x - 1) = 30$

2) $(2x + 1)(x - 3) + (2x - 1)(x + 2) = 4x - 1$

3) $(x - 3)^2 + (x - 4)^2 = (x - 2)^2$

4) $x - \frac{5}{x} = \frac{11}{4}$

5) $\frac{4x+5}{x} - \frac{12}{x-2} = 1$

6) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-1}{x-5} = 4$

7) $\frac{5-3x}{3-5x} + \frac{3-5x}{5-3x} = \frac{5}{2}$

8) $\frac{5}{x-2} + \frac{3}{x-3} - \frac{7}{x-1} = 0$

9) $\frac{2}{1-x} - \frac{7}{x+1} = \frac{3}{x}$

10) $\frac{3x}{x+6} - \frac{4}{x-1} = 4$

11) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{9}{4x}$

12) $\frac{1}{x} + \frac{4}{x+3} + \frac{4}{x-3} = 0$

13) $\frac{5}{3-2x} + \frac{4}{x-2} = \frac{5}{x+1}$

Kvadratické nerovnice ... $ax^2 + bx + c < 0$. (Další znaky nerovnosti ... $>$, $\neq$, $\leq$, $\geq$)

Řešení kvadratické nerovnice

1. $x^2 < 9$

$|x| < 3$

$x \in (-3, 3)$

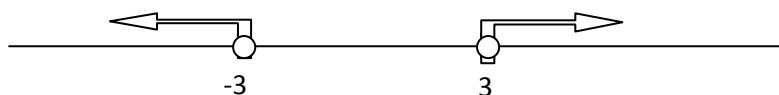
nebo $x^2 - 9 < 0$

$(x - 3)(x + 3) < 0$

součin dvou výrazů je menší než nula právě když je jeden výraz menší a druhý současně větší než nula!

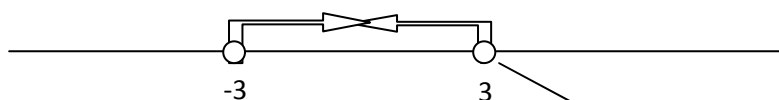
1. Tedy $x - 3 > 0 \wedge$ (a současně) $x + 3 < 0$

$x > 3 \wedge x < -3$... společné x neexistuje



2. $x - 3 < 0 \wedge x + 3 > 0$

$x < 3 \wedge x > -3$ společné x je v intervalu $(-3, 3)$



Krajní bod nepatří do intervalu
– kulaté závorky

2. $x^2 + 4 > 0$

$x^2 > -4$... tato nerovnice je splněna vždy ... řešením jsou všechna $x \in \mathbb{R}$.

3. $x^2 + 25 \leq 0$

$x^2 \leq -25$... neexistuje takové x pro které by platila uvedená nerovnost ... nemá řešení

4. Úplnou kvadratickou nerovnici můžeme řešit numericky – vyřešíme příslušnou kvadratickou rovnici, pomocí kořenů rozložíme kvadratický trojčlen na součin dvou lineárních členů, vrátíme znaménko nerovnosti a řešíme v součinovém tvaru.

Nebo

Řešíme graficky pomocí příslušné kvadratické funkce

Př. Vyřešte numericky i graficky: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

1. Numericky ... převedeme na rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0$, najdeme kořeny ... $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

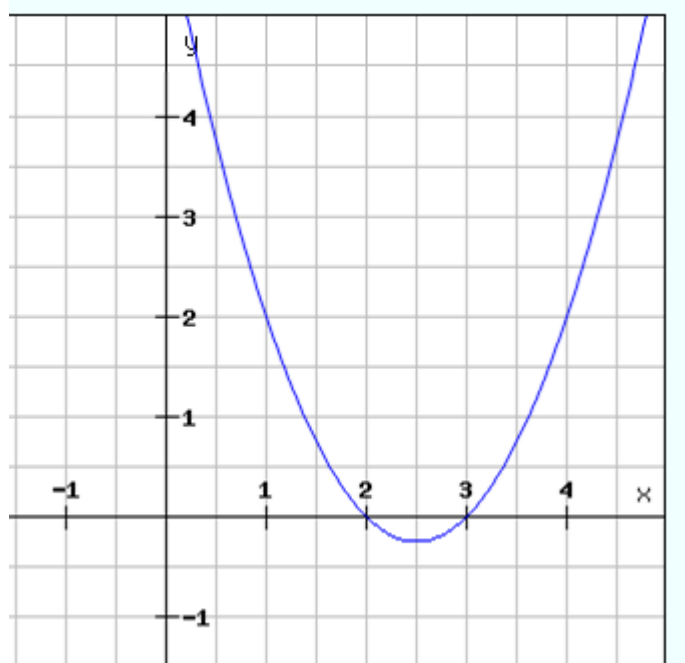
Rozložíme na součin a vrátíme nerovnici ... $(x - 2)(x - 3) \leq 0$

Řešíme v součinovém tvaru: a) $x - 2 \leq 0 \wedge x - 3 \geq 0$... $x \leq 2 \wedge x \geq 3$... nemá řešení

b) $x - 2 \geq 0 \wedge x - 3 \leq 0$... $x \geq 2 \wedge x \leq 3$... $\langle 2, 3 \rangle$

2. Graficky ... převedeme na příslušnou kvadratickou funkci ... $y = x^2 - 5x + 6$,

Nakreslíme její graf



Zajímá nás ta část grafu pro kterou

platí: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Tato část se nachází v intervalu $\langle 2, 3 \rangle$.

Příklady

Řešte numericky I graficky

- 1) $3x^2 + 5x > 0$
- 2) $x^2 + 14x + 49 \geq 0$
- 3) $4x - 4x^2 - 5 > 0$
- 4) $7x^2 + 19x - 6 \leq 0$
- 5) $2 - 5x - 3x^2 \leq 0$
- 6) $2x^2 - 7x < 0$

Řešte v R

- 1) $(2x - 2)^2 - 3x(x - 3) \leq 19 - x$
- 2) $(x - 2)^2 - (x - 3)^2 < (x - 4)^2$
- 3) $(9x - 5)(x + 1) \geq 4x$
- 4) $(-6 - 2x)(-6 + 2x) > 8(x + 5) - 4$
- 5) $\frac{3-5x}{7} + \frac{(2x+1)^2}{14} < \frac{6x+1}{14} - \frac{1}{2}$
- 6) $(x - 1)(x^2 + 2x + 1) - (x + 4)(x^2 - 4x + 16) \leq x(x - 1)$